English Translation of
To the possibility of comparison of three-dimensional electromagnetic systems with non-uniform anisotropic filling.

By L. S. Dolin (1961)

Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii.
Radiofizika 4(5): 964-967
CODEN: IVYRAY
ISSN: 0021-3462

Transformation Optics Discovered

О ВОЗМОЖНОСТИ СОПОСТАВЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИСТЕМ С НЕОДНОРОДНЫМ АНИЗОТРОПНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Л. С. Долин

Показано, что, основываясь на инвариантности уравнений Максвелла, относительно определенного вида преобразований метрики пространства и проницаемостей среды, можно исследовать трехмерные системы с неоднородным анизотропным заполнением путем их сопоставления с другими, более простыми трехмерными системами.

TO THE POSSIBILITY OF COMPARISON OF THREE-DIMENSIONAL ELECTROMAGNETIC SYSTEMS WITH NONUNIFORM ANISOTROPIC FILLING

L. S. Dolin

It was shown that it is possible to investigate three-dimensional systems with nonuniform anisotropic filling by comparison them with other, more simple three-dimensional systems. The examination is made basing on an invariance of Maxwels equations relative to the certain type of transformation of space metric and medium permeability and permittivity.

Известно, что для ряда систем электромагнитные поля могут быть найдены без непосредственного решения уравнений Максвелла, путем сопоставления с полями других, более простых систем. Сюда относятся двухмерные статические системы, которые могут быть исследованы методом конформного преобразования границ, трехмерные статические системы с кусочно-однородным диэлектрическим (магнитным) заполнением силовых трубок или областей, ограниченных эквипотенциальными поверхностями, а также некоторые высокочастотные системы со специально подобранными распределениями проницаемостей. Действительно, для некоторых систем с однородным заполнением удается подобрать такую метрику, в которой максвелловские уравнения формально не отличаются от уравнений, описывающих поле в соответствующим образом распределенной неоднородной среде, но записанных в других обобщенных координатах. Таким путем были найдены, в частности, решения некоторых двухмерных задач и задач с аксиальной симметрией [1—3].

It is known that, for certain systems electromagnetic fields can be found without directly solving the Maxwell's equations, by comparing them with the fields for other, simpler, systems. Here one can mention two-dimensional static systems, which can be investigated using the method of conformal mapping of boundaries, three-dimensional static systems with piecewise constant dielectric (magnetic) material parameters for domains bounded by equipotential surfaces; examples also include some high-frequency systems with optimally tuned distributions of the permittivity/permeability. Indeed, for some systems with a homogeneous medium it is possible to select a metric in which Maxwell's equations are formally no different from the equations describing the field in a corresponding inhomogeneous medium, but expressed in different generalized coordinates. In this way, one can find particular solutions of some two-dimensional problems and of problems having axial symmetry [1-3].

рией [ ].

Цель настоящего сообщения состоит в выяснении возможностей сопоставления аналогичных трехмерных систем.

Запишем уравнения Максвелла в обобщенных ортогональных координатах:

$$\frac{1}{h_i h_j}\left[\frac{\partial}{\partial \xi^i}(h_j H_j) - \frac{\partial}{\partial \xi^j}(h_i H_i)\right] = \frac{4\pi}{c} j_k^e + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{kl} E_l;$$

$$\frac{1}{h_i h_j}\left[\frac{\partial}{\partial \xi^i}(h_j E_j) - \frac{\partial}{\partial \xi^j}(h_i E_i)\right] = -\frac{4\pi}{c} j_k^m - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{l=1}^{3} \mu_{kl} H_l;$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(h_j h_k \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{il} E_l\right) = 4\pi\rho^e;$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \xi^j}\left(h_j h_k \sum_{l=1}^{3} \mu_{il} H_l\right) = 4\pi\rho^m. \tag{1}$$

The aim of the present communication is a comparative analysis of analogous three-dimensional electromagnetic systems.

Let us write down the Maxwell's equations in generalized orthogonal coordinates:

(See above equations) (1)

Здесь $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\boldsymbol{j}^e$ и $\boldsymbol{j}^m$ — плотности электрических и магнитных токов, ρ^e и ρ^m — объемные плотности соответствующих зарядов, ε_{ik} и μ_{ik} — компоненты тензоров диэлектрической $\|\varepsilon_{ik}\|$ и магнитной $\|\mu_{ik}\|$ проницаемостей, ξ_i обобщенные ортогональные координаты ($i=1, 2, 3$), имеющие размерность длины, h_i — соответствующие этим координатам и, следовательно, безразмерные коэффициенты Ламе; индексы i, j, k образуют всевозможные циклические перестановки из чисел 1, 2, 3.

Here $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ are the electric and magnetic fields strengths, $\boldsymbol{j}^e$ and $\boldsymbol{j}^m$ are densities of the electric and magnetic currents, ρ^e and ρ^m are volumetric densities of corresponding charges, ε_{ik} and μ_{ik} are the components of the tensors of dielectric permittivity $\|\varepsilon_{ik}\|$ and of magnetic permeability $\|\mu_{ik}\|$ respectively, the ξ_i are generalized orthogonal coordinates (i=1,2,3) having the dimensions of length, the h_i are the non-dimensional metric Lame coefficients (scaling factors) corresponding to these coordinates; the indices i,j,k form all possible cyclic permutations of 1, 2, 3.

Нетрудно убедиться в том, что система уравнений (1) для ковариантных составляющих векторов поля инвариантна относительно таких преобразований метрики пространства, проницаемостей среды и распределения источников электромагнитного поля, при которых одновременно сохраняются следующие величины:

$$\varepsilon_{kl}\frac{h_i h_j}{h_l}=invar,\quad j_i^e h_j h_k=invar,\quad \rho^e h_1 h_2 h_3=invar,$$
$$\mu_{kl}\frac{h_i h_j}{h_l}=invar,\quad j_i^m h_j h_k=invar,\quad \rho^m h_1 h_2 h_3=invar, \tag{2}$$

где $k,\ l=1,\ 2,\ 3$ и $i\neq j\neq k$. Из инвариантности уравнений следует возможность существования инвариантных решений*:

$$h_l E_l=invar;\quad h_l H_l=invar. \tag{3}$$

It is straightforward to verify that the system (1) of equations for the covariant components of the field vectors is invariant with respect to such transformations of the metric of the space, the medium's permittivity and permeability and of the distributions of the sources of the electromagnetic field, for which the following entities are simultaneously conserved:

(See the above equations) (2)

where k,l = 1, 2, 3 and i≠j ≠ k. The invariance of the equations implies the possibility of existence of invariant solutions*:

$$h_l E_l=invar;\quad h_l H_l=invar. \tag{3}$$

Условия (2), (3) могут быть положены в основу принципа сопоставления полей в трехмерных системах с неоднородным анизотропным заполнением. В общем случае анизотропность является неизбежной, так как для скалярных значений ε и μ требования (2) могут стать противоречивыми.

Проиллюстрируем общие соотношения (2), (3) несколькими простыми примерами.

Начнем с задачи о собственных колебаниях резонаторов с идеально-проводящими стенками. Из полученных формул следует, что если в выражениях для полей некоторого исходного резонатора сделать формальную замену переменных, то полученные такой заменой функции могут рассматриваться (с точностью до функциональных множителей) как компоненты электромагнитного поля в новом резонаторе, отличающемся от исходного как своей формой, так и параметрами заполняющей его среды.

Conditions (2), (3) can form the foundation for a principle of comparison of fields in three-dimensional systems with an inhomogeneous anisotropic filling. In general, the anisotropy is inevitable, due to the constraints (2) on ε and μ.

Let us illustrate the generic conditions (2) and (3) on several simple examples.

Let us start with problems of oscillations of resonators with ideal boundaries. It follows from the obtained formulas that, if one makes a formal change of variables in the expressions for the fields in a resonator, then the functions obtained by such a transformation can be regarded (up to a functional factor) as components of the electromagnetic field in the new resonator, different from the initial one by its shape as well as by the parameters of the medium which fills it.

Возьмем, например, за исходную систему резонатор, границы которого образованы пересечением координатных поверхностей цилиндрической системы (рис. 1), а проницаемости заполнения ε и μ равны единице. Переходя от цилиндрических координат r, φ, z к декартовым x, y, z, мы получаем прямоугольный резонатор, заполненный средой с проницаемостями

$$\| \varepsilon_{ik} \| = \| \mu_{ik} \| = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}.$$

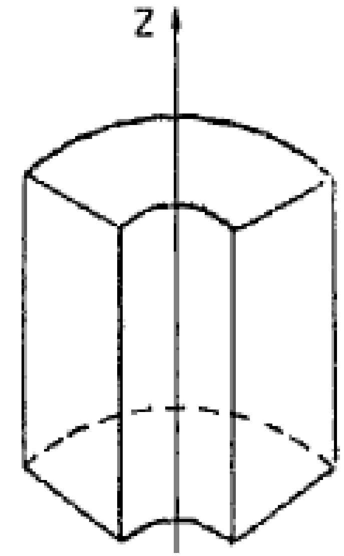

Рис. 1.

Let us take, for example, as the reference system, a resonator whose boundaries are formed by intersection of the coordinate surfaces of a cylindrical system (Fig. 1), and let the normalized permittivity/ permeability ε and μ be equal to 1. Changing from the cylindrical coordinates *r, ϕ, z* to Cartesian coordinates *x, y, z* we obtain a rectangular resonator filled by the medium with the permittivity/ permeability

$$\| \varepsilon_{ik} \| = \| \mu_{ik} \| = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}.$$

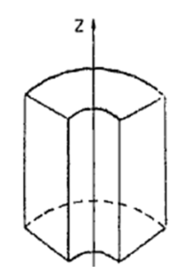

Fig. 1

Спектр собственных частот этого резонатора такой же, как у исходного, а собственные поля могут быть найдены следующим образом: если $\Phi_1(r, \varphi, z)$, $\Phi_2(r, \varphi, z)$, $\Phi_3(r, \varphi, z)$ — компоненты электрического или магнитного поля исходного резонатора вдоль осей цилиндрической системы, то проекции поля прямоугольного резонатора на декартовы направления равны $\Phi_1(x, y, z)$, $x^{-1}\Phi_2(x, y, z)$, $\Phi_3(x, y, z)$.

---

* Аналогичные соотношения могут быть получены и для косоугольных координатных систем.

The spectrum of the eigenfrequencies of this resonator is the same as for the original resonator, and the eigenfunctions can be found in the following way: if $\Phi_1(r,\phi,z)$, $\Phi_2(r,\phi,z)$, $\Phi_3(r,\phi,z)$ are components of the electric and magnetic field of the original resonator along the axes of the cylindrical system, the projections of the field of the rectangular resonator on the Cartesian directions equal $\Phi_1(x,y,z)$, $x^{-1}\Phi_2(x,y,z)$, $\Phi_3(x,y,z)$.

----

* Analogous relations can be obtained also for non-orthogonal coordinate systems.

К сожалению, условия (2), (3) не позволяют преобразовывать границы и свойства среды независимо. Задание закона изменения одного из параметров системы (формы границы, $\| \varepsilon_{ik} \|$ или $\| \mu_{ik} \|$) однозначно определяет все другие, что, естественно, ограничивает возможности рассматриваемого метода.

Если преобразование координат изменяет метрику в ограниченной области пространства, то параметры среды и выражения для полей вне этой области сохраняются. Такие преобразования могут быть использованы для конструирования неотражающих неоднородностей.

Unfortunately, the conditions (2), (3) do not allow one to transform the boundaries and the properties of the medium independently. Setting a rule for transforming one of the parameters of the system (shape of the boundary, $|| \varepsilon_{ik} ||$ or $|| \mu_{ik} ||$) uniquely determines all the others, which naturally restricts the potential of the present method.

If a transformation of coordinates changes the metric within a bounded region, the parameters of the medium and the expressions for the fields outside this region are preserved. Such transformations can be used for constructing non-reflecting inhomogeneities.

Получим для примера параметры системы, в которую преобразуется свободное пространство при переходе от сферических координат r, Θ, φ к координатам $R(r)$, Θ, φ, где $R=R(r)$ — функция радиальной координаты, удовлетворяющая условию

$$R(r) \to r. \tag{4}$$

Коэффициенты Ламе этой системы равны $h_R = dr(R)/dR$, $h_\Theta = r(R)$, $h_\varphi = r(R)\sin\Theta$, и для проницаемостей среды получим следующие формулы:

$$\| \varepsilon_{ik} \| = \| \mu_{ik} \| = \begin{vmatrix} \dfrac{R^2}{r^2(R)} \dfrac{dr(R)}{dR} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{dr(R)/dR} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{dr(R)/dR} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Let us obtain, for example, the parameters of a system which would emerge as a result of a transformation of free space when changing spherical coordinates *r, ϑ, ϕ* into coordinates *R(r), ϑ, ϕ* , where R=R(r) is a function of the radial coordinate satisfying the condition

(4)

$$R(r) \to r.$$

The scale factors for this system are equal to h_R=*dr(R)/dR,* h_θ=r(R), h_φ=r(R)sin θ, and for the permittivity/ permeability of the medium we obtain the following formulas:

(5)

(See equation above)

Как видно, при условии (4) $\varepsilon_{lk} = \mu_{lk} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1$. Плоская волна, падающая из бесконечности на неоднородность с параметрами (5), пройдет через нее без искажений.

Приведем пример сопоставления систем с источниками. Исходной системой будем считать свободное пространство, в котором равномерно вращается по окружности радиуса a заряженная частица. В качестве координат исходной системы возьмем $\ln(r/a)$, φ, z (где r, φ, z—цилиндрические координаты) и посмотрим, как изменятся характер излучения и свойства системы, если перейти к декартовым координатам. Пусть координата φ изменяется в пределах $(-\infty, +\infty)$. Тогда в системе x, y, z получим бесконечную последовательность частиц, движущихся вдоль оси y на расстоянии 2π друг от друга. Применение соотношений (2) показывает, что величина заряда и его скорость остаются прежними, а пространство оказывается заполненным средой со следующими тензорами проницаемостей:

As one can see, under the condition (4) $\varepsilon_{lk} = \mu_{lk} \to 1$ as $r \to \infty$. **A plane wave incident from infinity upon an inhomogeneity with parameters (5) will go through it without distortions.**

Let us give an example of the correspondence between systems with sources. Let the reference system be free space, in which a charged particle uniformly moves along a circle of a radius *a*. Let us take as coordinates of the original system $ln(r/a)$, ϕ, z (where r, ϕ, z are cylindrical coordinates) and let us consider how the pattern of the radiation and properties of the system changes if we switch to Cartesian coordinates. Let the coordinate ϕ vary within (- ∞, + ∞). Then, in the system x, y, z, we obtain an infinite sequence of particles moving along the y-axis a distance 2π apart. Applying the relations (2) shows that the magnitude of the charge and its velocity remain the same but the space becomes filled with a medium with the following permittivity/ permeability tensors:

$$\| \varepsilon_{ik} \| = \| \mu_{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{vmatrix}.$$

Как видно, появление излучения уже не является результатом неравномерности движения заряда, а вызвано взаимодействием со средой: его можно интерпретировать как черенковское излучение в неоднородной анизотропной среде.

Приведенные примеры, число которых может быть легко увеличено, показывают, что метод сопоставления, основанный на соотношениях (2), (3), может оказаться полезным при решении ряда электромагнитных задач. Вместе с тем следует отметить, что сложность

$$\| \varepsilon_{ik} \| = \| \mu_{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{vmatrix}$$

As one can see, the radiation is no longer the result of a non-uniformity of the charge's motion, but is caused by an interaction with the medium: it can be interpreted as Cherenkov's radiation in an anisotropic medium.

The above examples, and many more can be devised, show that the correspondence method based on relations (2), (3), can be useful for solving a number of electromagnetic problems. At the same time it has to be emphasized that the complexity параметров среды, которые получаются при использовании метода, — неоднородность, анизотропия, наличие нулей и полюсов — серьезно ограничивает возможности его применения.

В заключение сделаем предельный переход к двухмерному преобразованию и обобщим некоторые из результатов, полученные с его помощью в работах [1–3]. Если одна из сопоставляемых систем рассматривается в прямоугольных координатах x, y, z, а другая — в криволинейных координатах u, v, z, из которых две первые получены конформным преобразованием декартовых, а третья прямоугольная, то формулы (2) переходят для диагональных тензоров в соотношения:

$$\varepsilon_{kk}^{(2)} = \varepsilon_{kk}^{(1)}; \quad \mu_{kk}^{(2)} = \mu_{kk}^{(1)} \qquad (k = 1, 2);$$
$$\varepsilon_{33}^{(2)} = \varepsilon_{33}^{(1)} / h^2; \quad \mu_{33}^{(2)} = \mu_{33}^{(1)} / h^2, \tag{6}$$

of the medium's parameters which emerge as a result of the method's application – non-uniformity, anisotropy, presence of zeros and poles – considerably limits its applicability.

In conclusion, let us perform a limiting procedure for a two-dimensional transformation and generalize some of the results obtained with its help in [1-3]. If one of the two compared systems is considered in Cartesian coordinates *x, y, z* and the other in curvilinear coordinates *u, v, z,* of which the former two coordinates appear as a result of a conformal mapping of the (first two) Cartesian coordinates, and the third coordinate (z) is Cartesian, the formulas (2) transform for diagonal tensors into the relations:

$$\varepsilon_{kk}^{(2)} = \varepsilon_{kk}^{(1)}; \quad \mu_{kk}^{(2)} = \mu_{kk}^{(1)} \qquad (k = 1, 2);$$
$$\varepsilon_{33}^{(2)} = \varepsilon_{33}^{(1)} / h^2; \quad \mu_{33}^{(2)} = \mu_{33}^{(1)} / h^2, \tag{6}$$

где верхним индексом „1“ отмечены величины, относящиеся к первой системе, индексом „2“ — ко второй, а h — коэффициент Ламе, соответствующий координатам u, v.

Для двухмерных полей тензоры можно заменить скалярами и формулы (6) перейдут в известные соотношения:

$$\text{при} \quad H_z = 0, \quad E_z \neq 0 \qquad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(1)}/h^2,$$
$$\text{при} \quad E_z = 0, \quad H_z \neq 0 \qquad \mu^{(2)} = \mu^{(1)}/h^2.$$

where the upper index “1” denotes entities of the first system, while the index “2” corresponds to those of the second system, and *h* is the scale factor for coordinates *u, v.*

For two-dimensional fields, the tensors can be replaced by scalars and formulas (6) will transform into known relations:

$$\text{for} \quad H_z = 0, \quad E_z \neq 0 \qquad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(1)}/h^2,$$
$$\text{for} \quad E_z = 0, \quad H_z \neq 0 \qquad \mu^{(2)} = \mu^{(1)}/h^2.$$

Формулы (6) позволяют легко обобщить на случай трехмерных полей результаты работ [1–3], посвященных вопросам согласования волноводных трактов с помощью неоднородных сред. Например, чтобы ликвидировать отражение в волноводе, имеющем прямоугольное сечение в любой из плоскостей, проходящих через ось z, и произвольное в плоскости $z = \mathrm{const}$ (рис. 2), необходимо заполнить его анизотропной средой с тензором (6), где под h следует понимать метрический коэффициент такой системы координат, в которой границы волновода совпадают с линиями постоянного значения одной из этих координат. Для волн типа TE можно положить $\mu=1$ и обеспечить согласование компонентой ε_{33}.

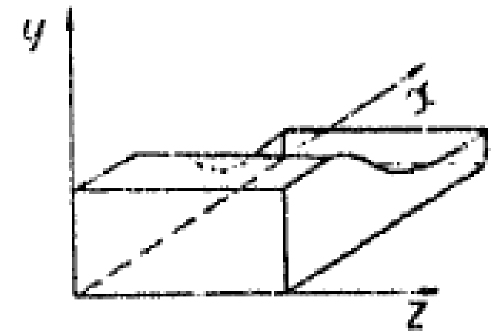

Рис. 2.

Formulas (6) allow one to easily generalise to the three-dimensional case the results in [1-3] devoted to questions of correspondence of waveguides with the aid of inhomogeneous media. For example, to eliminate a reflection in a waveguide having a rectangular cross-section in any of the planes containing the z-axis and arbitrary cross-section in the *z = const* (Fig. 2), it is necessary to fill it with an anisotropic medium with tensor (6), where *h* should be understood as a metric coefficient of such a coordinate system in which the waveguide's boundaries coincide with lines of constant value of one of these coordinates. For waves of TE type one can set $\mu=1$ and ensure the desired correspondence by appropriately choosing the component ε_{33}.

Автор выражает благодарность М. А. Миллеру и В. И. Таланову за помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Л. Рождественский, Д. Н. Четаев, ДАН СССР, 79, 8 (1951).
2. В. А. Бунин, Труды НИИ МАП, вып. 6 (50), 12 (1957).
3. В. А. Бунин, Труды НИИ МАП, вып. 4 (58), 17 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 марта 1961 г.

The author expresses gratitude to M.A. Miller and V.I. Talanov for their help with performing this work.

Literature

1. B.L. Rozhdestvenski, D.T. Chetaev, DAN USSR, 79, 8 (1951).
2. V.A. Bunin, Trudy NII MAP, issue 6 (50), 12 (1957).
3. V.A. Bunin, Trudy NII MAP, issue 4 (58), 17 (1958).

Institute for Radiophysics, Gor'kiy University

Submitted 11 March 1961.

Translated anonymously by some exceptional mathematicians fluent in both English and Russian. **Graeme Milton, August 3rd, 2016**